Über Berührungstransformationen

Teil 1: Grundlegende Erklärungen

Olaf Dietrich*, München

Version: 2014-01-21

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

Diese kurze Einführung in das Gebiet der Berührungstransformationen wurde motiviert durch die sehr knappen Darstellungen, wie sie beispielsweise bei Erwin Madelung (1922) oder Ernst Schmutzer (2005) zu finden sind und die – aufgrund ihrer Kürze – als erste Einführung mehr Fragen offenlassen, als sie beantworten können.

In diesem Text soll die „klassische“ Definition im Vordergrund stehen, wie sie in den Werken von Sophus Lie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gegeben wurde (Lie u. Engel, 1890; Lie u. Scheffers, 1896) und die auch von Madelung (1922) und Schmutzer

*Anmerkungen, Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bitte an mailto:olaf@dtrx.de

(2005) aufgegriffen wird; insbesondere werden wir auch weitgehend der Notation von Lie folgen und (soweit dies praktikabel ist) die gleichen Bezeichnungen wählen. Die wesentlichen Definitionen und Ergebnisse sind dabei den Werken „Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt“ von S. Lie und F. Engel (1890, Abtheilung I) und „Geometrie der Berührungstransformationen“ von S. Lie und G. Scheffers (1896, S. 43–47, 67–70) entnommen. Lediglich auf den Gebrauch von „klassischen“ Differentialen im Sinne infinitesimal kleiner Größen soll hierbei verzichtet werden; stattdessen werden wir mit den entsprechenden linearen Abbildungen (Linearformen, 1-Formen) arbeiten. Insgesamt wurde in diesem Text keine konsequente mathematische Strenge, sondern eine eher erläuternde Darstellungsweise angestrebt.

Um die grundlegende Definition in vereinfachter Form kurz vorwegzunehmen: Berührungstransformationen (in der Ebene) können als Abbildungen zwischen ebenen Kurven aufgefaßt werden; eine gegebene Kurve wird also durch eine Berührungstransformation wieder auf eine ebene Kurve abgebildet. „Interessant“ wird die Transformation dadurch, daß es sich im allgemeinen *nicht* um eine Punkttransformation handelt, es also keine 1-zu-1-Zuordnung zwischen einzelnen Punkten der Urbild- und der Bildebene gibt. Der Name „Berührungstransformation “ stammt daher, daß hierbei insbesondere zwei sich berührende Kurven (die also einen Punkt mit gleicher Tangente besitzen) wieder auf zwei sich berührende Kurven abgebildet werden.

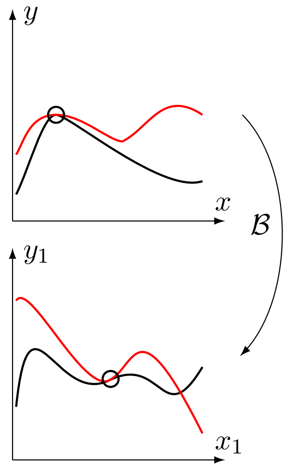

Abb. 1: *Eine Berührungstransformation $\mathcal{B}$ bildet ebene Kurven auf ebene Kurven ab.*

Berührungstransformationen können in der Ebene oder für höherdimensionale Räume definiert werden. Wir werden uns hier (im ersten Teil) zunächst auf die Berührungstransformationen in der Ebene beschränken. In mathematisch moderner Sprache entsprechen Berührungstransformationen (synonym auch als *Kontakttransformationen* bezeichnet) den strukturerhaltenden Diffeomorphismen zwischen Kontaktmannigfaltigkeiten, den sogenannten *Kontaktomorphismen*.

Berührungstransformationen tauchen in verschiedenen Zusammenhängen auf; wichtige Beispiele für Berührungstransformationen aus der Physik sind die Legendre-Transformation oder die kanonischen Transformationen der (Hamiltonschen) Mechanik.

2 Kurven in der Ebene

Grundlegend für die Berührungstransformationen werden die Kurven in der Ebene (mit den Koordinaten x und y) sein, die sich sich auf verschiedene Weisen angeben lassen; sehr allgemein etwa in parametrisierter Form $\big(x(t), y(t)\big)$ mit einem Parameter t, der über einen geeigneten Definitionsbereich läuft. Alternativ kann die Kurve implizit definiert sein in der Form $\phi(x, y) = 0$ oder, wenn es zu jedem Wert x nur einen Wert y gibt, auch in der Form $y = f(x)$ (häufig verkürzt zu $y(x)$). Ist die Kurve in der letzten Form gegeben, so lassen sich die beiden anderen Darstellungen schnell ablesen: mit geeignetem Definitionsbereichen können wir beispielsweise schreiben $\big(x(t), y(t)\big) = (t, f(t))$ oder $\phi(x, y) = f(x) - y$; beide Darstellungen sind (offensichtlich) nicht eindeutig, da man etwa t durch eine monotone Funktion von t (wie etwa t^3 – mit entsprechend angepaßtem Definitionsbereich) ersetzen kann oder ϕ mit einer beliebigen glatten, von Null verschiedenen Funktion multiplizieren kann.

3 Punkttransformationen

Bevor wir im Detail auf die Berührungstransformationen eingehen, soll zur Vorbereitung zunächst von Punkttransformationen die Rede sein. Wie wir sehen werden, entspricht jeder Punkttransformation auch eine Berührungstransformation. Umgekehrt gilt dies allerdings nicht; der Begriff der Berührungstransformation ist also allgemeiner, und die Menge der Berührungstransformationen ist eine (echte) Obermenge der Menge der Punkttransformationen.

Eine Punkttransformation $\mathcal{P}$ (beispielsweise in der Ebene $\mathbf{R}^2$ mit den Koordinaten x, y) ist eine glatte Abbildung, die den Punkt (x, y) auf den Punkt (x_1, y_1) abbildet

$$\mathcal{P} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (x_1, y_1) \tag{1}$$

und die mit zwei glatten Komponentenfunktionen

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y) \tag{2}$$

beschrieben werden kann.

Dabei bleibt es (hier wie auch später bei den Berührungstransformationen) eine Frage der Interpretation, ob man die beiden Ebenen $\mathbf{R}^2$ miteinander identifiziert und dementsprechend die Punkte in der Ebene „verschiebt“ oder ob man sich hier zwei verschiedene Ebenen vorstellt. Eine weitere Interpretation erhält man, wenn man die Abbildung $\mathcal{P}$ nur als Koordinatentransformation (oder „Kartenwechsel“ einer Mannigfaltigkeit) betrachtet, die demselben Punkt neue Koordinaten zuweist. Dementsprechend werden auch die Bezeichnungen Punkttransformation und Koordinatentransformation synonym verwendet.

Wenn wir zudem fordern, daß die Punkttransformation (wenigstens lokal) umkehrbar (also ein Diffeomorphismus) ist, so bildet offensichtlich eine Punkttransformation nicht nur Punkte aufeinander ab, sondern auch andere geometrische Objekte, die aus Punkten „aufgebaut“ sind, also insbesondere auch Kurven auf Kurven oder zweidimensionale Teilmengen der Ebene auf andere zweidimensionale Teilmengen.

Einfache Beispiele für Punkttransformationen sind also etwa Verschiebungen in der Ebene (um einen konstanten Betrag $(\Delta x, \Delta y)$) oder Drehungen in der Ebene um einen Winkel ϕ, aber auch nichtlineare Abbildungen, die sich entsprechend Gl. (2) schreiben lassen.

4 Das Linienelement – Erweiterung der Koordinaten

Wie können wir nun die Punkttransformation Gl. (2) so erweitern, daß eine verallgemeinerte Transformation zwischen ebenen Kurven entsteht? Der Weg dorthin führt zunächst über eine Erweiterung der Koordinaten (x, y) der Ebene zum sogenannten „Linienelement". Als Linienelement wird ein Punkt (x, y) zusammen mit einer ihm zugeordneten Steigung p (graphisch repräsentierbar beispielsweise durch eine durch den Punkt (x, y) gehende Gerade mit der Steigung p), also das Tripel $(x, y;\, p)$ bezeichnet.[1]

Mit dieser Definition kann man jetzt eine (glatte) ebene Kurve auch als Menge von Linienelementen betrachten, da der Kurve $y(x)$ in jedem Punkt (x, y) die Kurvensteigung $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ zugeordnet werden kann (anschaulich ist das gleichbedeutend damit, die Kurve in jedem Punkt mit der zugehörigen Tangente zu versehen).

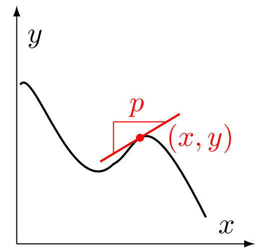

***Abb. 2:** Definition des Linienelements $(x, y; p)$: ein Punkt (x, y) zusammen mit der Steigung p.*

Die Definition des Linienelements ermöglicht es nun aber auch, die Tripel (x, y, p) (zum Beispiel aller Linienelemente einer ebenen Kurve) als Punkte in einem erweiterten, dreidimensionalen Raum (statt der zweidimensionalen Ebene) zu betrachten, und diese beiden Betrachtungsweisen sollen in den folgenden Abschnitten weiter verfolgt werden.

5 Der Elementverein

Wir wollen nun also die Linienelemente $(x, y;\, p)$ von (glatten) ebenen Kurven $y(x)$ im dreidimensionalen (x, y, p)-Raum[2] statt nur in der (x, y)-Ebene betrachten. Die Kurve $y(x)$ in der Ebene hat im Punkt (x, y) die Steigung $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ oder, in parametrisierter Form[3], $p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)/\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \dot{y}/\dot{x}$. Somit entspricht der ebenen Kurve $\big(x(t), y(t)\big)$ im dreidimensionalen Raum dann die Kurve $\big(x(t), y(t), p(t) = \dot{y}/\dot{x}\big)$.

Da der Wert $p(t)$ vom Verlauf der Kurve (genauer: von ihrer Steigung) abhängt, wird nicht jede beliebige *drei*dimensionale Kurve $\big(x(t), y(t), p(t)\big)$ auf diese Weise mit einer *zwei*dimensionalen Kurve $\big(x(t), y(t)\big)$ zusammenhängen. Gesucht ist daher eine Beschreibung oder Charakterisierung, die angibt, ob die dreidimensionale Kurve $\big(x(t), y(t), p(t)\big)$ wirklich auf eine zweidimensionale Kurve zurückgeht.

Dafür benötigt man die Steigung $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ der (ebenen) Kurve in einem Punkt, die sich auch aus den Komponenten des (zwei- oder dreidimensionalen) Tangentialvektors in diesem Punkt berechnen läßt. Die Kurve hat im Punkt (x, y, p) (in parametrisierter Form soll dies dem Punkt mit dem Parameter $t = t_0$ entsprechen) den Tangentialvektor $v_{(x,y,p)} \in \mathbf{R}^3$ mit den Komponenten $v_{(x,y,p)} = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t_0), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t_0), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t_0)) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{p}(t_0))$. Für diese Vektoren definieren wir jetzt eine lineare Abbildung in die reellen Zahlen (also eine Linearform $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$), die genau dann 0 ergeben soll, wenn es sich um einen

[1] Diese Definition des Linienelements findet man schon bei Sophus Lie (Lie u. Scheffers, 1896, S. 11), wobei hier zunächst die Steigung als y' (anstelle von p) bezeichnet wird. Anschaulich beschreibt Lie hier das Linienelement als „ein unendlich kleines Stück einer Curve".

[2] Im einfachsten Fall betrachten wir hier den Raum $\mathbf{R}^3$, allgemeiner wäre eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit.

[3] Als verkürzte Schreibweise für die Ableitungen der Kurvenkomponenten x, y nach dem Parameter t (anschaulich als Zeitableitungen aufzufassen) wählen wir $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$, $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$ usw.

Tangentialvektor an eine solche Kurve im (x, y, p)-Raum handelt, die aus einer ebenen Kurve $y(x)$ hervorgegangen ist.

Das bedeutet, wir definieren eine Linearform $\omega : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, die den Tangentialvektor $v_{(x,y,p)}$ in die reellen Zahlen abbildet und die für jeden Fußpunkt (x, y, p) unterschiedlich aussieht (also letztlich eine Differentialform vom Grad 1 oder Einsform auf $\mathbf{R}^3$):

$$\omega_{(x,y,p)} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad v_{(x,y,p)} \mapsto \omega_{(x,y,p)}(v_{(x,y,p)}) \tag{3}$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Einsform die gewünschte Eigenschaft besitzt, wenn sie die Komponenten $(-p, 1, 0)$ hat, da dann aus der Bedingung $p(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)/\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$ gerade (wie gewünscht) folgt:

$$\omega_{(x,y,p)}(v_{(x,y,p)}) = -p\dot{x}(t_0) + \dot{y}(t_0) = 0. \tag{4}$$

In die umgekehrte Richtung folgt aus $\omega_{(x,y,p)}(v_{(x,y,p)}) = 0$ allerdings nicht notwendigerweise, daß $y(x)$ eine ebene Kurve ist, sondern es existiert auch noch die weitere Möglichkeit, daß $\big(x(t), y(t)\big) = (x_0, y_0)$ konstant ist und die dreidimensionale Kurve somit parallel zur p-Achse verläuft (die zweidimensionale „Kurve“ ist hier also nur ein einzelner Punkt in der Ebene). Auch diesen Fall wollen wir einschließen in die folgende Definition: Wir bezeichnen eine dreidimensionale Kurve $\big(x(t), y(t), p(t)\big)$ als *Verein von Linienelementen* oder (kürzer) als *Elementverein*, wenn diese Gl. (4) (oder kurz $\omega(v) = 0$) erfüllt[4].

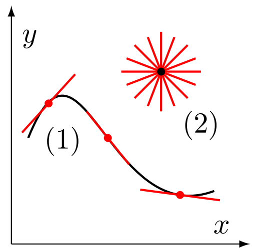

Abb. 3: *Zwei Arten von Elementvereinen in der Ebene: (1) Kurven mitsamt ihren Steigungen und (2) Punkte mit „allen“ Steigungen.*

Betrachten wir die Elementvereine nun wieder in der (x, y)-Ebene, so sind diese also entweder gegeben durch die ebenen Kurven mit den jeweils zugehörigen Tangenten (also den Steigungen) in jedem Kurvenpunkt oder (der zweite Fall) durch einzelne Punkte der Ebene mit allen möglichen Steigungen (Geraden), die durch diesen Punkt gehen.[5]

6 Definition von Berührungstransformationen

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen können wir nun endlich die Berührungstransformationen definieren. Motiviert ist diese Definition durch die Eigenschaft, daß Berührungstransformationen zwei ebene Kurven, die sich in einem Punkt berühren, wieder auf zwei Kurven mit gemeinsamer Tangente in einem Punkt abbilden sollen. Der Berührungspunkt der beiden Kurven läßt sich durch das Linienelement (x, y, p) (also insbesondere durch die übereinstimmende Steigung p) beschreiben und soll auf ein anderes Tripel (x_1, y_1, p_1) abgebildet werden.

[4] Bei Lie (Lie u. Scheffers, 1896, S. 38) hat unsere Gl. (4) in Differentialschreibweise die Form: $\mathrm{d}y - p\mathrm{d}x = 0$. Diese Schreibweise entspricht in unserer Auffassung der Darstellung einer Einsform mit den Basiselementen $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}p)$ und den Komponenten $(-p, 1, 0)$.

[5] Auch diese Definition des Elementvereins geht auf Lie zurück (Lie u. Scheffers, 1896, S. 38), (Wilson, 1913, S. 5).

Somit liegt es nahe, Berührungstransformationen im dreidimensionalen (x, y, p)-Raum in analoger Weise zu den Punkttransformationen der Ebene (also des (x, y)-Raumes) zu definieren. Explizit können wir unsere Berührungstransformation somit in Form dreier glatter Abbildungen aufschreiben:

$$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p). \tag{5}$$

Diese Abbildungen X, Y, P können aber nicht beliebig gewählt werden, sondern sollen so definiert sein, daß sie Elementvereine $\big(x(t), y(t), p(t)\big)$ wieder auf Elementvereine $\big(x_1(t), y_1(t), p_1(t)\big)$ abbilden. Es soll also $p_1 = \mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x_1$ gelten. Wenn wir die Abbildungen entsprechend definiert haben, so wird also auch jede ebene Kurve (über den Umweg ihres Elementvereins) wieder auf eine ebene Kurve abgebildet.

(Ein einfaches Gegenbeispiel einer dreidimensionalen Punkttransformation, die keine Berührungstransformation ist, erhält man zum Beispiel, wenn man $P(x, y, p) = 0$ setzt, aber $Y(x, y, p)$ nicht konstant ist; die zweidimensionale Zielkurve müßte dann überall die Steigung 0 haben, was aber wegen der Wahl der Funktion Y nicht erfüllt ist.)

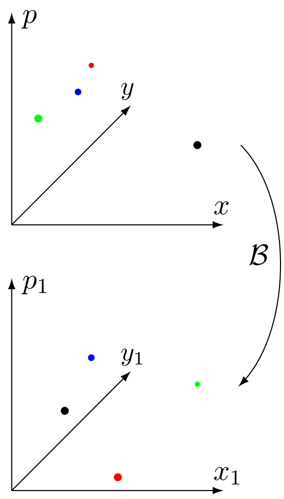

Abb. 4: *Eine Berührungstransformation $\mathcal{B}$ als Abbildung (Punkttransformation) zwischen zwei 3-dimensionalen Räumen.*

Es handelt sich bei der so definierten Berührungstransformation aber im allgemeinen *nicht* um eine Punkttransformation *der Ebene*: Falls nämlich nur ein *Punkt* (x, y) in der Ebene gegeben ist (und keine dazugehörige Steigung p), so wird dieser im allgemeinen auf eine *Kurve* $\big(x_1(p), y_1(p)\big)$ in der Ziel- (oder Bild-)Ebene abgebildet. Die Steigung p kann ja beliebig gewählt werden und parametrisiert somit die Kurve in der Zielebene. Berührungstransformationen ergeben für einen einzelnen Punkt (x, y) der Ebene alleine also noch keinen rechten Sinn, da dieser Punkt nicht auf einen eindeutigen anderen Punkt, sondern auf eine Kurve in der Ebene (also ein anderes geometrisches Objekt) abgebildet wird.

Das Bild $\big(x_1(t), y_1(t), p_1(t)\big)$ der oben definierten Abbildung (festgelegt durch die drei Komponentenfunktionen X, Y, P) soll nun also definitionsgemäß ebenfalls einen Elementverein bilden, genau dann wenn das Urbild $\big(x(t), y(t), p(t)\big)$ einen solchen bildet (also die Bedingung Gl. (4) erfüllt). Die Tangentialvektoren zur Bildkurve (x_1, y_1, p_1) seien $v_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{p}_1)$. Gemäß der Definition (Gl. (5)) von (x_1, y_1, p_1) sind die Komponenten

$$\dot{x}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(x(t), y(t), p(t)) = X_x \dot{x} + X_y \dot{y} + X_p \dot{p} \tag{6}$$

$$\dot{y}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y(x(t), y(t), p(t)) = Y_x \dot{x} + Y_y \dot{y} + Y_p \dot{p} \tag{7}$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(x(t), y(t), p(t)) = P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_p \dot{p}, \tag{8}$$

wobei die Symbole $X_x = \frac{\partial}{\partial x} X(x, y, p)$, $X_y = \frac{\partial}{\partial y} X(x, y, p)$, $Y_x = \frac{\partial}{\partial x} Y(x, y, p)$ usw. für die partiellen Ableitungen der Funktionen X, Y, P stehen. Für die Tangentialvektoren v_1 der

Bildkurve im Bild(fuß)punkt $r_1 = (x_1, y_1, p_1)$ soll also ebenfalls gelten

$$\omega_{r_1}(v_1) = -p_1 \dot{x}_1 + \dot{y}_1 = 0 \tag{9}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke aus Glgen. (6) und (7) und wegen $p_1 = P(x, y, p)$ erhält man

$$0 = \omega_{r_1}(v_1) = (-PX_x + Y_x)\dot{x} + (-PX_y + Y_y)\dot{y} + (-PX_p + Y_p)\dot{p} = \omega_{1,r}(v) \tag{10}$$

also eine Gleichung für die neue Linearform ω_1, die wir für den Tangentialvektor v der Urbildkurve (und somit auch am Urbild-Fußpunkt r) auswerten, statt für denjenigen der Bildkurve.

Die Abbildungen X, Y, P beschreiben also genau dann eine Berührungstransformation, wenn $\omega_1(v) = 0$ aus $\omega(v) = 0$ folgt (ausgewertet jeweils mit dem Tangentialvektor v an die Urbildkurve im Punkt r). Diese Folgerung muß nun für beliebige Kurven $\big(x(t), y(t), p(t)\big)$ gelten, d. h. wenn $\big(x(t), y(t), p(t)\big)$ ein Elementverein ist (also eine zweidimensionale Kurve $\big(x(t), y(t)\big)$ mit zugehöriger Steigung $p(t)$), dann ist definitionsgemäß $\omega(v) = 0$ und $\omega_1(v) = 0$ soll folgen. Ist $\big(x(t), y(t), p(t)\big)$ kein Elementverein, so gilt (wenigstens für ein t) $\omega(v) \neq 0$, und es muß dann auch $\omega_1(v) \neq 0$ sein.

Aus diesem Sachverhalt läßt sich eine einfache Beziehung zwischen ω und ω_1 ableiten. Wenn zwei lineare Abbildungen (genauer: Linearformen) $\alpha, \beta : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ die Eigenschaft besitzen, beliebige Vektoren $v \in \mathbf{R}^n$ entweder beide auf 0 abzubilden, also $\alpha(v) = \beta(v) = 0$ oder eben auf einen Wert ungleich 0, also $\alpha(v) \neq 0 \neq \beta(v)$, so müssen die beiden Linearformen proportional sein, also $\alpha = c\beta$. (Zur Veranschaulichung: Im euklidischen $\mathbf{R}^n$ entspricht jeder Linearform $\alpha : v \mapsto \alpha(v)$ ein Skalarprodukt mit einem Vektor a, also $\alpha(v) = a \cdot v$, und der gerade beschriebene Sachverhalt besagt, daß alle Vektoren v, die orthogonal zu besagtem einem Vektor a liegen ($a \cdot v = 0$), auch orthogonal zum anderen sind ($b \cdot v = 0$). Diese zu a oder b orthogonalen Vektoren bilden jeweils einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum des $\mathbf{R}^n$ und definieren daher die Normalenrichtungen auf diesen Unterräumen. Wir haben gefordert, daß die beiden Unterräume zu a und b identisch sein sollen; beide Linearformen entsprechen also Normalenvektoren auf diesem Unterraum und haben somit die gleichen Richtung.)

Die beiden Linearformen sind somit proportional und es gilt:

$$\omega_{1,(x,y,p)} = \rho(x, y, p)\omega_{(x,y,p)}, \tag{11}$$

wobei $\rho(x, y, p)$ ein skalarer Faktor ist[6].

Kombiniert man jetzt Gl. (11) und Gl. (10), so erhält man in Komponentenschreibweise die drei Gleichungen

$$(-PX_x + Y_x, -PX_y + Y_y, -PX_p + Y_p) = \rho(x, y, p)\,(-p, 1, 0) \tag{12}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch als Gleichungssystem schreiben als

$$\begin{array}{rcrcrl} -PX_x & + & Y_x & + & \rho p & = 0 \\ -PX_y & + & Y_y & - & \rho & = 0 \\ -PX_p & + & Y_p & & & = 0 \end{array} \tag{13}$$

[6] Dieser Zusammenhang zwischen den beiden Linearformen hat bei Lie (1896, S. 44) in Differentialschreibweise die Form $\mathrm{d}Y - P\mathrm{d}X = \rho \cdot (\mathrm{d}y - y'\mathrm{d}x)$.

oder in Matrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} Y_x & X_x & p \\ Y_y & X_y & -1 \\ Y_p & X_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -P \\ \rho \end{pmatrix} = 0. \tag{14}$$

Wenn dieses Produkt aus einer Matrix und dem Spaltenvektor $(1, -P, \rho)$ also 0 ergeben soll, so muß die Determinante der Matrix verschwinden (das Gleichungssystem zu einer Matrix mit vollem Rang, also mit Determinante ungleich Null, hätte nur die triviale Lösung, dies kann also für den gegebenen Spaltenvektor, der ja mindestens eine (von 0 verschiedene) 1 enthält, nicht zutreffen), d. h.

$$\begin{vmatrix} Y_x & X_x & p \\ Y_y & X_y & -1 \\ Y_p & X_p & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Indem man die Determinante berechnet, erhält man die Gleichung

$$X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) = 0. \tag{16}$$

Diese Nebenbedingung müssen die Funktionen $X(x, y, p)$ und $Y(x, y, p)$ also erfüllen, damit es sich bei X, Y, P um eine Berührungstransformation handeln kann. Zusätzlich muß auch noch – entsprechend der letzten Zeile von Gl. (13) – für $P(x, y, p)$ gelten

$$-PX_p + Y_p = 0. \tag{17}$$

Um eine Berührungstransformation zu erhalten, kann man also beispielsweise mit einer frei gewählten Funktion $x_1 = X(x, y, p)$ beginnen; mit dieser Funktion und Gl. (16) ergeben sich gewisse Bedingung, welche die Funktion $Y(x, y, p)$ erfüllen muß. Hat man auf diese Weise die Funktion Y festgelegt, so kann man schließlich noch die mit Hilfe von Gl. (17) die Funktion $P(x, y, p)$ bestimmen.

Zusammenfassend können wir also festhalten, daß eine Berührungstransformation (zwischen ebenen Kurven) durch eine spezielle Punkttransformation zwischen den dreidimensionalen Räumen der Linienelemente gegeben ist, die gewisse Nebenbedingungen (Gl. (16) und Gl. (17)) erfüllen muß.

7 Punkttransformationen als Berührungstransformationen

Wie oben bereits erwähnt, sind die Punkttransformationen eine echte Teilmenge der allgemeineren Berührungstransformationen. Um dies genauer zu beschreiben, betrachten wir eine Punkttransformation $\mathcal{P}$ in Form ihrer Komponentenfunktionen

$$x_1 = \tilde{X}(x, y), \quad y_1 = \tilde{Y}(x, y) \tag{18}$$

und zeigen, wie man hieraus die Beschreibung als Berührungstransformation gewinnt. Hierzu lassen sich die entsprechenden Komponentenfunktionen der Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p) \tag{19}$$

berechnen, für die einerseits offensichtlich gilt:

$$X(x,y,p) = \tilde{X}(x,y), \quad Y(x,y,p) = \tilde{Y}(x,y), \tag{20}$$

d. h. X und Y hängen nicht von der Steigung p $(= \mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$ ab und entsprechen vollständig den jeweiligen Funktionen der Punkttransformation. Die dritte Funktion P läßt sich nun aus den bekannten Funktionen X und Y berechnen; für die Steigung p_1 der Bildkurve gilt

$$p_1 = \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(x(t),y(t))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(x(t),y(t))} = \frac{Y_x\dot{x} + Y_y\dot{y}}{X_x\dot{x} + X_y\dot{y}} = \frac{Y_x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}Y_y}{X_x + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}X_y} = \frac{Y_x + pY_y}{X_x + pX_y} \tag{21}$$

also

$$P(x,y,p) = \frac{Y_x + pY_y}{X_x + pX_y}. \tag{22}$$

Mit dieser Komponentenfunktion P für die Steigung hat man also eine Berührungstransformation definiert, die der ursprünglich gegebenen Punkttransformation entspricht.[7] (Wie oben bereits bemerkt, kann die so definierte Berührungstransformation natürlich auch als Punkttransformation zwischen den beiden *drei*dimensionalen (x, y, p)-Räumen aufgefaßt werden.)

8 Die Legendre-Transformation als Beispiel

Ein wichtiges klassisches Beispiel einer Berührungstransformation ist die Legendre-Transformation (benannt nach dem französischen Mathematiker Adrien-Marie Legendre, 1752–1833). Die Gleichungen gemäß Gl. (5), die diese Transformation festlegen, lauten

$$x_1 = X(x,y,p) = p, \tag{23}$$
$$y_1 = Y(x,y,p) = xp - y, \tag{24}$$
$$p_1 = P(x,y,p) = x. \tag{25}$$

Offensichtlich handelt es sich hierbei *nicht* um eine einfache erweiterte Punkttransformation, da sowohl X als auch Y jeweils von p abhängen. Wenn die Glgen. (23) bis (25) tatsächlich eine Berührungstransformation beschreiben, müssen die Nebenbedingungen Gl. (16) und Gl. (17) erfüllt sein. Dies trifft zu, denn für Gl. (16) ergibt sich:

$$X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) = 1 \cdot (p + p \cdot (-1)) - x \cdot (0 + p \cdot 0) = 0, \tag{26}$$

und Gl. (17) ist

$$-PX_p + Y_p = -x \cdot 1 + x = 0. \tag{27}$$

Die Legendre-Transformation $\mathcal{L}$ führt also von Kurven $y = f(x)$ mit der Steigung $p = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ zu neuen Kurven $y_1 = g(x_1)$, wobei die neue unabhängige Variable $x_1 = p$ der ursprünglichen Steigung (Ableitung) der Funktion f entspricht und die neue abhängige

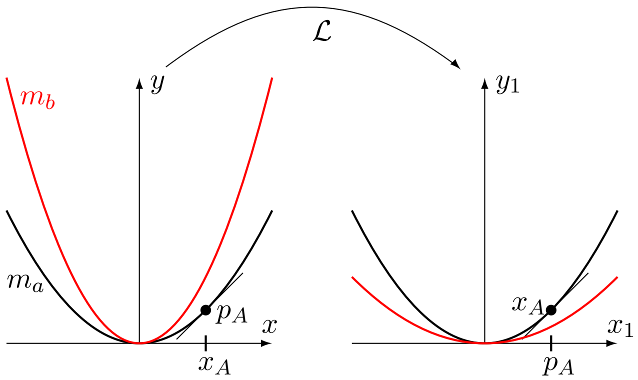

Abb. 5: *Die Legendre-Transformation $\mathcal{L}$ als Beispiel einer Berührungstransformation. Gezeigt sind zwei Kurven mit $m_b = 2m_a$.*

Variable $y_1 = g(x_1) = g(p)$ sich über die Funktion $g(p) = xp - f(x) = x(p)p - f(x(p))$ (dabei ist die Umkehrfunktion $x(p)$ der Ableitung $p = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ erforderlich) berechnet.

Als Beispiel soll die Funktion $f(x) = \frac{m}{2}x^2$ dienen (mit einem Parameter m). Die Steigung dieser Funktion (und gleichzeitig die neue unabhängige Variable) ist $p = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x = mx$. Es gilt also $x = p/m$. Für die neuen Funktionswerte erhält man damit $y_1 = xp - y = \frac{1}{m}p^2 - f(x) = \frac{1}{m}p^2 - \frac{1}{2m}p^2 = \frac{1}{2m}p^2$ und die neue Steigung ist (wie gefordert) $p_1 = p/m = x$.

Literatur

[Lie u. Engel 1890] Lie, Sophus ; Engel, Friedrich: *Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt*. Leipzig : B. G. Teubner, 1890 `http://books.google.de/books?id=Z7IIy6zQZZsC`

[Lie u. Scheffers 1896] Lie, Sophus ; Scheffers, Georg: *Geometrie der Berührungstransformationen*. Leipzig : B. G. Teubner, 1896 `http://books.google.com/books?id=kc7oDhL8fIUC`

[Madelung 1922] Madelung, Erwin: *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Berlin : Verlag von Julius Springer, 1922 `http://books.google.com/books?id=n463us1fH8MC`

[Schmutzer 2005] Schmutzer, Ernst: *Grundlagen der Theoretischen Physik*. 3. Auflage. Weinheim : Wiley-VCH, 2005 `http://books.google.com/books?id=a0YkRomfSjIC`. – ISBN 3–527–40555–0

[Wilson 1913] Wilson, Harry: *Untersuchung eine linear-quadratischen Berührungstransformation*. Weida, Universität Göttingen, Inaugural-Dissertation, 1913. `http://www-gdz.sub.uni-goettingen.de/cgi-bin/digbib.cgi?PPN314924582`

[7] Lie bezeichnet diese Transformation als die *erweiterte* Punkttransformation (Lie u. Engel, 1890, S. 3–5).