

Über Berührungstransformationen

Teil 2: Die *Æquatio directrix*

Olaf Dietrich*, München

Version: 2014-01-28

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	1
2	Die Hüllkurve einer Kurvenschar	2
2.1	Kurvenscharen in Funktionendarstellung	3
2.2	Kurvenscharen in impliziter Darstellung	3
2.3	Kurvenscharen in parametrisierter Darstellung	4
2.4	Beispiele	4
3	Die <i>Æquatio directrix</i>	4
4	Weitere Eigenschaften und Ergebnisse	7
5	Die Legendre-Transformation als Beispiel	8
	Literatur	9

1 Vorbemerkungen

Wie im ersten Teil¹ dargestellt, ist eine Berührungstransformation (anschaulich beschrieben) eine Abbildung zwischen ebenen Kurven $(x(t), y(t)) \mapsto (x_1(t), y_1(t))$, bei der insbesondere zwei sich berührende Kurven wieder auf zwei sich berührende Kurven abgebildet werden. Eine Berührungstransformation ist im allgemeinen *keine* Punkttransformation der Ebene; ein einzelner Punkt (x, y) wird *nicht* eindeutig auf einen anderen Punkt (x_1, y_1) abgebildet. Stattdessen wird die Steigung $p = dy/dx$ der abzubildenden Kurve benötigt, um die Berührungstransformation eindeutig zu definieren.

*Anmerkungen, Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bitte an <mailto:olaf@dtrx.de>

¹siehe [URL:http://dtrx.de/od/docs/ContactTransformationsPart1_Dietrich.pdf](http://dtrx.de/od/docs/ContactTransformationsPart1_Dietrich.pdf)

Ein Punkt (x, y) der Ebene \mathbf{R}^2 zusammen mit einer Steigung p , also das Tripel (x, y, p) , wird als *Linielement* bezeichnet; jede Kurve definiert über ihre Punkte und Steigungen eine Menge von Linielementen, die *Elementverein* genannt wird. Eine Berührungstransformation ist nun eine Abbildung von Linielementen auf Linielemente, mit der Eigenschaft, daß Elementvereine auch wieder auf Elementvereine abgebildet werden.

Explizit läßt sich eine Berührungstransformation als Abbildung $\mathcal{B} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ von Linielementen $(x, y, p) \mapsto (x_1, y_1, p_1)$ schreiben, die durch drei (Komponenten-)Funktionen festgelegt wird:

$$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p). \quad (1)$$

Diese Abbildungen X, Y, P können aber nicht beliebig gewählt werden, sondern sollen so definiert sein, daß sie Elementvereine wieder auf Elementvereine abbilden. Es soll also insbesondere $p_1 = dy_1/dx_1$ gelten.

Wie im ersten Teil gezeigt wurde, müssen die Funktionen X, Y, P zwei Bedingungen erfüllen:

$$X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) = 0, \quad (2)$$

$$-PX_p + Y_p = 0, \quad (3)$$

wobei die Symbole $X_x = \frac{\partial}{\partial x}X(x, y, p)$, $X_y = \frac{\partial}{\partial y}X(x, y, p)$, $Y_x = \frac{\partial}{\partial x}Y(x, y, p)$ usw. für die partiellen Ableitungen der Funktionen X, Y, P stehen.

Wenn wir die Abbildungen entsprechend definiert haben, so wird von ihnen also jede ebene Kurve (über den Umweg ihres Elementvereins) wieder auf eine ebene Kurve abgebildet; ein einzelner Punkt (x, y) hingegen wird im allgemeinen auf eine Kurve $(x_1(p), y_1(p))$ abgebildet, die durch die (nicht festgelegte) Steigung p parametrisiert wird.

2 Die Hüllkurve einer Kurvenschar

Im weiteren Verlauf benötigen wir einige einfache Eigenschaften von Kurvenscharen und den *Hüllkurven* von Kurvenscharen (auch als *Einhüllende* oder *Enveloppen* bezeichnet), die hier vorab kurz zusammengefaßt werden sollen.

Eine Kurve K kann, wie im ersten Teil beschrieben, entweder parametrisiert $(x(t), y(t))$ oder implizit $\phi(x, y) = 0$ oder als Funktion $y = f(x)$ definiert werden. Hängt die Beschreibung der Kurve zusätzlich von einem Parameter α ab (der für jede einzelne Kurve einen festen Wert haben soll), so erhält man im allgemeinen für jeden Wert von α eine andere Kurve K_α , insgesamt – für alle α – also eine Kurvenschar, die auch wieder parametrisiert $(x(t, \alpha), y(t, \alpha))$, implizit $\phi(x, y; \alpha) = 0$ oder als Funktion $y = f(x, \alpha)$ angegeben werden kann.

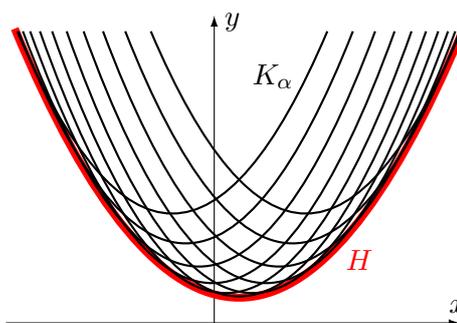


Abb. 1: Kurvenschar (schwarz) aus Parabeln K_α , $y = f(x, \alpha) = 1 + \alpha^2 + (x - \alpha - 1)^2$ mit Hüllkurve H (rot).

Manche Kurvenscharen K_α besitzen eine Hüllkurve H , nämlich eine Kurve, die in jedem ihrer Punkte eine der Kurven K_α berührt und die zudem *jede* Kurve K_α berührt. Dies ist nicht bei jeder Kurvenschar möglich; eine Schar von parallelen Geraden, welche die Ebene überdecken, hat etwa keine Hüllkurve. Eine andere, besonders anschauliche Beschreibung der Hüllkurvenpunkte ist, daß diese die Schnittpunkte zweier „infinitesimal benachbarter“ Kurven K_α und $K_{\alpha+\Delta\alpha}$ sind. Aus dieser letzten Definition ergibt sich schnell das übliche Verfahren zur Berechnung der Hüllkurve, das im folgenden – der Vollständigkeit halber für alle drei Darstellungen von Kurvenscharen – hergeleitet wird.

2.1 Kurvenscharen in Funktionendarstellung

Zwei „benachbarte“ Kurven seien $f(x, \alpha)$ und $f(x, \alpha + \Delta\alpha)$; für jeden Schnittpunkt $(x, y) = (x, f(x, \alpha))$ dieser Kurven gilt

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) = f(x, \alpha). \quad (4)$$

Für kleine α nähern wir $f(x, \alpha + \Delta\alpha) \approx f(x, \alpha) + \Delta\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$, und damit folgt aus Gl. (4) die Bedingung:

$$0 = f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha) \approx \Delta\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha), \quad \text{also} \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = 0. \quad (5)$$

Um die Hüllkurve zu berechnen, muß man somit die Funktion $f(x, \alpha)$ nach dem Parameter α ableiten; dann sucht man die Nullstellen $\alpha^{(0)}$ dieser Ableitung (das sind die Stellen, an denen sich die Kurve K_α in erster Näherung nicht mehr ändert, wenn α variiert wird). Diese Nullstelle wird im allgemeinen von x abhängen, das heißt, abhängig davon, welche Stelle x man betrachtet, wird eine andere Kurve K_α stationär. Setzt man nun eine Nullstelle $\alpha^{(0)}(x)$ in die Funktion $f(x, \alpha)$ ein, so erhält man die Hüllkurve (oder wenigstens einen Kandidaten für die Hüllkurve) $H(x) = f(x, \alpha^{(0)}(x))$.

2.2 Kurvenscharen in impliziter Darstellung

Ganz ähnlich verfährt man, wenn K_α implizit in der Form $\phi(x, y; \alpha) = 0$ definiert ist: Die Schnittpunkte der beiden Kurven K_α und $K_{\alpha+\Delta\alpha}$ sind diejenigen Punkte (x, y) , die gleichzeitig $\phi(x, y; \alpha) = 0$ und $\phi(x, y; \alpha + \Delta\alpha) = 0$ und somit natürlich auch

$$\phi(x, y; \alpha + \Delta\alpha) - \phi(x, y; \alpha) = 0 \quad (6)$$

erfüllen. Mit der gleichen Näherung wie oben ist $\phi(x, y; \alpha + \Delta\alpha) \approx \phi(x, y; \alpha) + \Delta\alpha \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(x, y; \alpha)$. Folglich findet man die Schnittpunkte als (simultane) Lösung der beiden Gleichungen

$$\phi(x, y; \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(x, y; \alpha) = 0 \quad (7)$$

(zwei Gleichungen sind erforderlich, weil ja jede der Gleichungen Kurvenscharen beschreibt und α eliminiert werden muß). Praktisch kann man also etwa $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(x, y; \alpha) = 0$ setzen und so ein $\alpha^{(0)}(x, y)$ bestimmen, welches – eingesetzt in $\phi(x, y; \alpha^{(0)}(x, y)) = 0$ – die implizite Beschreibung der Hüllkurve liefert.

2.3 Kurvenscharen in parametrisierter Darstellung

Ist die Kurvenschar in der Form $(x(t, \alpha), y(t, \alpha))$ angegeben, so findet man die Schnittpunkte benachbarter Kurven mit den beiden (simultan zu erfüllenden) Bedingungen

$$x(t, \alpha) = x(t + \Delta t, \alpha + \Delta\alpha) \approx x(t, \alpha) + \Delta t \frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha) + \Delta\alpha \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, \alpha), \quad (8)$$

$$y(t, \alpha) = y(t + \Delta t, \alpha + \Delta\alpha) \approx y(t, \alpha) + \Delta t \frac{\partial y}{\partial t}(t, \alpha) + \Delta\alpha \frac{\partial y}{\partial \alpha}(t, \alpha), \quad (9)$$

aus denen (wie oben) die Terme $x(t, \alpha)$ und $y(t, \alpha)$ herausfallen. Löst man eine der beiden Gleichungen (im folgenden die erste) nach Δt auf und setzt dieses Δt dann in die andere (die zweite) Gleichung ein, so findet man:

$$0 = -\Delta\alpha \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, \alpha)}{\frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha)} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(t, \alpha) + \Delta\alpha \frac{\partial y}{\partial \alpha}(t, \alpha), \quad (10)$$

also (nach Division durch $\Delta\alpha$ und Multiplikation mit $\frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha)$) die Bedingung:

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha) \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha}(t, \alpha) - \frac{\partial y}{\partial t}(t, \alpha) \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, \alpha) = 0. \quad (11)$$

2.4 Beispiele

Für die Kurvenschar $y = f(x, \alpha) = 1 + \alpha^2 + (x - \alpha - 1)^2$ aus Abb. 1 ist $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = 2\alpha - 2(x - \alpha - 1)$ mit der Nullstelle $\alpha^{(0)} = \frac{1}{2}(x - 1)$. Damit erhält man für die Hüllkurve $H(x) = f(x, \alpha^{(0)}(x)) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)^2$, also eine Parabel mit doppelter Öffnungsbreite.

Ein Beispiel für eine Kurvenschar in parametrisierter Darstellung ist der Einheitskreis, der parallel zur x -Achse durch die Ebene geschoben wird: $(x, y) = ((\alpha + \sin t), (\cos t))$. Aus Gl. (11) erhält man die Bedingung $-1 \cdot \sin t - 0 = 0$, also $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$. Setzt man diese Werte in die Darstellung der Kurvenschar ein, so erhält man zwei Hüllkurven, nämlich $(x, y) = (\alpha, 1)$ und $(x, y) = (\alpha, -1)$, also zwei Geraden parallel zur x -Achse. Diese Beispiel illustriert auch, daß wirklich α und t in Gln. (8) und (9) variiert werden müssen, da für festes t (den Winkel im Kreis) und $\Delta\alpha > 0$ nur zwei Punkte in der Ebene definiert werden, aber kein Schnittpunkt benachbarter Kurven.

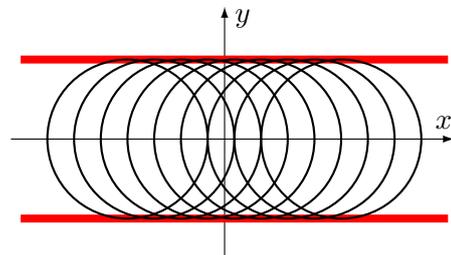


Abb. 2: Hüllkurven (rot) um parallelverschobene Einheitskreise.

3 Die *Æquatio directrix*

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen kommen wir nun zum Hauptpunkt dieses Textes. Neben der Definition einer Berührungstransformation mit den Gln. (1) – unter den Nebenbedingungen Gln. (2) und (3) – gibt es auch die Möglichkeit, die

Berührungstransformation ohne explizite Angabe oder Benutzung der Steigung p in nur *einer* Gleichung zu definieren. Die hierzu verwendete Gleichung ist die sogenannte *Æquatio directrix*, also „zuordnende Gleichung“² der Form:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0. \quad (12)$$

Setzt man in diese Gleichung einen *Punkt* (a, b) der Urbild-Ebene ein, so erhält man die implizite Darstellung einer *Kurve* $\Omega(a, b, x_1, y_1) = \phi_{a,b}(x_1, y_1) = 0$ in der Bildebene, die also dem Punkt (a, b) „zugeordnet“ wird. Dies entspricht soweit (zunächst einmal wenigstens qualitativ) dem von der Berührungstransformation bekannten Verhalten, bei der ebenfalls ein Punkt auf eine (durch die nicht festgelegte Steigung p parametrisierte) Kurve $(X(a, b, p), Y(a, b, p))$ abgebildet wird.

Wenn die *Æquatio directrix* in Gl. (12) eine gleich- und vollwertige Darstellung einer Berührungstransformation ist, dann müssen sich mit Hilfe der *Æquatio directrix* auch die Glgen. (1) wieder herleiten lassen. Es muß also insbesondere möglich sein, nur mit der *Æquatio directrix* ein Linienelement (x, y, p) auf das zugehörige Bild-Linienelement (x_1, y_1, p_1) abzubilden. Um dies zu erreichen, „übersetzen“ wir das Linienelement (x, y, p) in zwei Punkte (x, y) und (\tilde{x}, \tilde{y}) , die „benachbart“ auf einer Kurve liegen sollen, welche im Punkt (x, y) gerade die Steigung p hat. Es sei also $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x + \Delta x, y + \Delta y)$, wobei Δx später im Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ betrachtet werden soll und $\Delta y = p\Delta x$ durch die Steigung p des Linienelements (x, y, p) und Δx definiert ist. (Nur für diesen Wert von Δy liegt der zweite Punkt (\tilde{x}, \tilde{y}) tatsächlich auch auf der betrachteten Kurve.)

Statt also nur *einen* Punkt (x, y) in die *Æquatio directrix* einzusetzen, werden wir nun *zwei* (infinitesimal benachbarte) Punkte (x, y) und $(x + \Delta x, y + p\Delta x)$ einsetzen. Für die so definierten zwei Punkte erhalten wir auf diese Weise zwei (implizit definierte) *Kurven* in der Bildebene:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = \phi_{x,y}(x_1, y_1) = 0, \quad (13)$$

$$\Omega(x + \Delta x, y + p\Delta x, x_1, y_1) = \phi_{x+\Delta x, y+p\Delta x}(x_1, y_1) = 0. \quad (14)$$

Der gesuchte Punkt (x_1, y_1) , also das Bild der Berührungstransformation, ist nun derjenige durch die Glgen. (13) und (14) ausgezeichnete Punkt, in dem sich diese beiden Kurven (im Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$) schneiden.

Wenn man jetzt eine Lösung der Kurvendefinitionen explizit schreibt als

$$\phi_{x,y}(x_1, y_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \phi_{x,y}^{-1}(x_1), \quad (15)$$

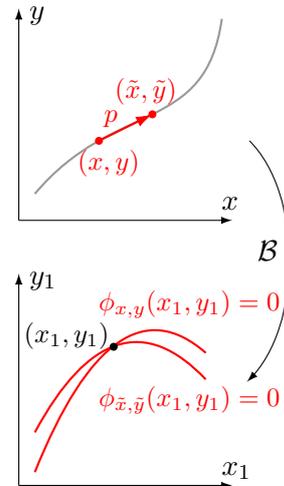


Abb. 3: Von der *Æquatio directrix* $\Omega = 0$ zur *Berührungstransformation* \mathcal{B} .

²vgl. hierzu etwa Lie u. Engel (1890, Fußnote, S. 17–18) und Plücker (1831, Fußnote, S. 265–267)

dann ist die Gleichung für den Schnittpunkt

$$\phi_{x,y}^{-1}(x_1) - \phi_{x+\Delta x, y+p\Delta x}^{-1}(x_1) = 0 \quad (16)$$

mit einer Lösung (Nullstelle) $x_1^{(0)} = x_1^{(0)}(x, y, p; \Delta x)$, die eine Funktion des Punktes (x, y) , der Steigung p und des Versatzes Δx ist. Der Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ dieser Nullstelle ist nun gerade die gesuchte Funktion X :

$$X(x, y, p) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_1^{(0)}(x, y, p; \Delta x) \quad (17)$$

und die Funktion Y ergibt sich folglich als

$$Y(x, y, p) = y_1(x, y, p) = \phi_{x,y}^{-1}(X(x, y, p)). \quad (18)$$

Die dritte Funktion P ergibt sich dann aus der Bedingung in Gl. (3).

Setzt man nun aber *alle* Punkte $(x(t), y(t))$ einer Kurve in die *Æquatio directrix* ein, so erhält man offenbar für jeden dieser Punkte eine Kurve in der Bildebene, insgesamt also eine (implizit definierte) Kurvenschar K_t gemäß $\Omega(x(t), y(t), x_1, y_1) = \phi_{x(t), y(t)}(x_1, y_1) = 0$. Wie oben beschrieben, sind die Bildpunkte (x_1, y_1) der Punkte $(x(t), y(t))$ der Urbildkurve gerade diejenigen, in denen sich je zwei benachbarte Scharkurven schneiden. Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, entspricht dies aber auch genau der Definition der Hüllkurve der Kurvenschar K_t . Der abschließende Schritt zur Berührungstransformation (also der Abbildung einer ebenen Kurve auf eine Kurve) ist daher nun die Berechnung der Hüllkurve H dieser Kurvenschar K_t , da diese gerade die gesuchte Bildkurve der Berührungstransformation ist. Wie oben in Gl. (7) beschrieben, entspricht dies der Suche nach der simultanen Lösung der beiden Gleichungen

$$\phi_{x(t), y(t)}(x_1, y_1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi_{x(t), y(t)}}{\partial t}(x_1, y_1) = 0, \quad (19)$$

wobei die letzte Gleichung auch

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \dot{y} = 0 \quad (20)$$

geschrieben werden kann.

Wir konnten somit zeigen, daß eine Berührungstransformation, also eine Abbildung zwischen Linienelementen, mittels einer einzigen Gleichung von vier Variablen, der *Æquatio directrix*, definiert werden kann. In diese Gleichung einzusetzen sind dann nicht nur die zu transformierenden Punkte (x, y) der Ebene (dies führt zu einer Abbildung von Punkten auf Kurven), sondern – wie für eine Berührungstransformation erforderlich – auch die Steigung p des Linienelements. Praktisch möglich wird das, indem man das Linienelement (x, y, p) in zwei (infinitesimal) benachbarte Punkte (x, y) und $(x + \Delta x, y + p\Delta x)$ übersetzt. Diese beiden Punkte führen über die *Æquatio directrix* jeweils zu einer Kurve und der Schnittpunkt dieser Kurven ist dann der gesuchte Bildpunkt (x_1, y_1) . Führt man diesen Vorgang für unbestimmte Werte (x, y, p) aus, so erhält man auf die gleiche Weise Funktionen $(x_1(x, y, p), y_1(x, y, p))$, aus denen sich auch die Steigung $p_1(x, y, p)$ berechnen läßt.

4 Weitere Eigenschaften und Ergebnisse

In diesem Abschnitt sollen noch einige Ergebnisse hergeleitet und erläutert werden, die so zum Beispiel bei Madelung (1922) und Schmutzer (2005) zu finden sind; für das grundlegende Verständnis ist dieser Abschnitt nicht erforderlich.

Setzt man in die *Æquatio directrix* die Punkte einer Urbildkurve $(x(t), y(t))$ und die Punkte der zugehörigen Bildkurve $(x_1(t), y_1(t))$ ein, wobei $x_1(t) = X(x(t), y(t), \dot{y}(t)/\dot{x}(t))$ und $y_1(t) = Y(x(t), y(t), \dot{y}(t)/\dot{x}(t))$ ist, so gilt definitionsgemäß

$$\Omega(x(t), y(t), x_1(t), y_1(t)) = 0 \quad (21)$$

für alle Werte von t . Folglich ist auch die Ableitung dieser Funktion nach t überall Null (für diese Folgerung würde bereits ausreichen, daß $\Omega(t)$ in Gl. (21) konstant wäre):

$$\frac{d}{dt}\Omega(x(t), y(t), x_1(t), y_1(t)) = \frac{\partial\Omega}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} \cdot \dot{y}_1 = 0. \quad (22)$$

Hieraus folgt zusammen mit Gl. (20) also auch:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} \cdot \dot{y}_1 = 0 \quad (23)$$

für die Bildkurve $(x_1(t), y_1(t))$.

Die beiden letzten Ergebnisse können auch mit Einsformen³ $\tilde{\omega}$ und ω als

$$\tilde{\omega}_{x,y,x_1,y_1}(\tilde{v}) = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{\omega}_{x,y,x_1,y_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1, \quad (24)$$

$$\omega_{x,y,x_1,y_1}(v) = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_{x,y,x_1,y_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1 = 0 \quad (25)$$

geschrieben werden, wobei $\tilde{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{x}_1, \dot{y}_1) = \dot{x}\partial_x + \dot{y}\partial_y + \dot{x}_1\partial_{x_1} + \dot{y}_1\partial_{y_1}$ und $v = (\dot{x}_1, \dot{y}_1) = \dot{x}_1\partial_{x_1} + \dot{y}_1\partial_{y_1}$ jeweils die Tangentialvektoren an die betrachteten Kurven sind.

Definiert man die Steigungen wie zuvor als $p = p(t) = \dot{y}/\dot{x}$ und $p_1 = p_1(t) = \dot{y}_1/\dot{x}_1$, so erhält man aus den Gln. (20), (21) und (23):

$$\Omega = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial x} + p\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = 0. \quad (26)$$

Ähnliche Ergebnisse lassen sich auch ableiten, wenn die Urbildkurve $(x(t), y(t))$ implizit in der Form $\phi(x, y) = 0$ definiert ist. Für eine Lösung $(x(t), y(t))$ dieser Gleichung gilt, analog zu Gl. (22):

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \dot{y} = 0. \quad (27)$$

Also ist

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{\frac{\partial\phi}{\partial y}(x(t), y(t))}{\frac{\partial\phi}{\partial x}(x(t), y(t))}, \quad (28)$$

³siehe hierzu auch Teil 1, Abschnitt 5,

(URL: http://dtrx.de/od/docs/ContactTransformationsPart1_Dietrich.pdf)

und man erhält aus Gl. (20)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (29)$$

Zusammen mit den Gleichungen $\Omega = 0$ und $\phi = 0$ ermöglicht dies die Berechnung der Bildkurven.

5 Die Legendre-Transformation als Beispiel

Die *Æquatio directrix* der Legendre-Transformation⁴ lautet

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = y + y_1 - xx_1 = 0. \quad (30)$$

Wie oben beschrieben, definiert die *Æquatio directrix* in der Bildebene eine Kurve für jeden (als fest angenommenen) Punkt (x, y) der Urbildebene. Für die zwei „benachbarten“ Punkte (x, y) und $(x + \Delta x, y + p\Delta x)$ (auf einer Kurve mit der Steigung p an der Stelle x) erhält man die beiden Bildkurven (hier bereits nach y_1 aufgelöst, vgl. Gl. (15)):

$$y_1 = xx_1 - y \quad \text{und} \quad y_1 = (x + \Delta x)x_1 - (y + p\Delta x) \quad (31)$$

Den Schnittpunkt dieser beiden Kurven erhält man durch Gleichsetzen, also (entsprechend Gl. (16))

$$xx_1 - y = (x + \Delta x)x_1 - (y + p\Delta x), \quad (32)$$

und somit ist

$$x_1 = p = X(x, y, p) \quad (33)$$

(Δx kürzt sich in diesem Fall heraus, so daß der Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ nicht erforderlich ist). Mit diesem Ergebnis erhält man für y_1 aus Gl. (31):

$$y_1 = xp - y = Y(x, y, p). \quad (34)$$

Die Funktion P erhält man aus Gl. (3) gemäß

$$p_1 = P(x, y, p) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial p}}{\frac{\partial X}{\partial p}} = \frac{x}{1} = x. \quad (35)$$

Die so berechneten Funktion X, Y, P stimmen mit den im ersten Teil angegebenen Funktionen für die Legendre-Transformation überein.

Wertet man die Glgen. (26) mit der *Æquatio directrix* der Legendre-Transformation aus, so erhält man – zusätzlich zur *Æquatio directrix* selbst – die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -x_1 + p = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = -x + p_1 = 0, \quad (37)$$

also die gleichen Ergebnisse wie in Glgen. (33) und (35).

⁴siehe hierzu auch Teil 1, Abschnitt 8,

(URL: http://dtrx.de/od/docs/ContactTransformationsPart1_Dietrich.pdf)

Literatur

- [Lie u. Engel 1890] LIE, Sophus ; ENGEL, Friedrich: *Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt*. Leipzig : B. G. Teubner, 1890 <http://books.google.de/books?id=Z7IIy6zQZZsC>
- [Madelung 1922] MADELUNG, Erwin: *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Berlin : Verlag von Julius Springer, 1922 <http://books.google.com/books?id=n463us1fH8MC>
- [Plücker 1831] PLÜCKER, Julius: *Analytisch-geometrische Entwicklungen*. Essen : G. B. Baredeker, 1831 <http://books.google.com/books?id=kc7oDhL8fIUC>
- [Schmutzer 2005] SCHMUTZER, Ernst: *Grundlagen der Theoretischen Physik*. 3. Auflage. Weinheim : Wiley-VCH, 2005 <http://books.google.com/books?id=a0YkRomfSjIC>. – ISBN 3-527-40555-0