Über Berührungstransformationen

Teil 3: Höherdimensionale Transformationen

Olaf Dietrich*, München

Version: 2017-12-07

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

Wie in den ersten beiden Teilen[1] erläutert, ist eine Berührungstransformation in der Ebene (anschaulich dargestellt) eine Abbildung zwischen ebenen Kurven $\big(x(t), y(t)\big) \mapsto \big(x_1(t), y_1(t)\big)$, bei der insbesondere zwei sich berührende Kurven wieder auf zwei sich berührende Kurven abgebildet werden. Zwei Kurven berühren sich im Punkt (x, y), wenn sie dort die gleiche Steigung $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ haben. Ein Punkt (x, y) in der Ebene zusammen mit einer Steigung p wird als *Linienelement* (x, y, p) bezeichnet.

Explizit läßt sich eine Berührungstransformation daher als Abbildung $\mathcal{B} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ von Linienelementen $(x, y, p) \mapsto (x_1, y_1, p_1)$ schreiben, die durch drei (Komponenten-)

*Anmerkungen, Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bitte an ⟨`mailto:olaf@dtrx.de`⟩

[1] siehe ⟨URL:`http://dtrx.de/od/docs/ContactTransformationsPart1_Dietrich.pdf`⟩ und ⟨URL:`http://dtrx.de/od/docs/ContactTransformationsPart2_Dietrich.pdf`⟩

Funktionen festgelegt wird:

$$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p). \tag{1}$$

Die Abbildungen X, Y, P können aber nicht völlig beliebig gewählt werden, sondern müssen die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) = 0, \tag{2}$$
$$-PX_p + Y_p = 0, \tag{3}$$

wobei die Symbole $X_x = \frac{\partial}{\partial x}X(x, y, p)$, $X_y = \frac{\partial}{\partial y}X(x, y, p)$, $Y_x = \frac{\partial}{\partial x}Y(x, y, p)$ usw. für die partiellen Ableitungen der Funktionen X, Y, P stehen.

Alternativ zu den Glgen. (1) lassen sich Berührungstransformationen in der Ebene mittels der sogenannten *Æquatio directrix* in der Form

$$\Omega(x, y,\, x_1, y_1) = 0 \tag{4}$$

darstellen. Die Kurve $\big(x(t), y(t)\big)$ wird hierbei auf die Hüllkurve der Kurvenschar K_t abgebildet, die man erhält, indem man $\Omega(x(t), y(t), x_1, y_1)$ als implizite Kurvendefinition in der (x_1, y_1)-Ebene, parametrisiert mit dem Scharparameter t, interpretiert.

2 Das (Hyper-)Flächenelement

Um höherdimensionale Berührungstransformationen zu betrachten, ist es erforderlich, nicht mehr nur Kurven $\big(x(t), y(t)\big) \in \mathbf{R}^2$ zugrundezulegen. Auf den ersten Blick mag es allerdings nicht unbedingt offensichtlich sein, wie die Verallgemeinerung in höherdimensionale Räume zu erfolgen hat: so werden wir *nicht* etwa einfach Kurven $\big(x^1(t), \ldots, x^N(t)\big)$ in höherdimensionalen Räumen $\mathbf{R}^N$ betrachten.[2] (Tatsächlich ist speziell die parametrisierte Form der Kurvenbeschreibung $\big(x(t), y(t)\big)$ in diesem Zusammenhang wohl eher verwirrend als zielführend).

Die gewünschte Verallgemeinerung erhält man dagegen auf offensichtliche Art und Weise, wenn wir die Kurven in $\mathbf{R}^2$ als Funktion $y = f(x)$ schreiben. Diesen Ausdruck verallgemeinern wir nun[3], in dem wir weiterhin skalare Funktionen betrachten, die aber nicht mehr nur für eindimensionale $x \in \mathbf{R}$, sondern für $(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^N) \in \mathbf{R}^N$ definiert sind[4]. Es sei also eine Funktion f gegeben gemäß:

$$f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}, (x^1, x^2, x^3, \ldots, x^N) \mapsto z = f(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^N) \tag{5}$$

[2]Diese Verallgemeinerung auf *Kurven* beispielsweise im Raum $\mathbf{R}^3$ betrachten Lie u. Scheffers (1896, S. 177–480) im zweiten Abschnitt "Geometrie der Linienelemente des Raumes" ihres Buchs; sie soll hier nicht weiter verfolgt werden.

[3]Vgl. hierzu Lie u. Scheffers (1896, S. 481–687, Abschnitt III) und insbesondere Lie u. Engel (1890, S. 44–77 und S. 114–171).

[4]Es handelt sich bei den n in x^n in diesem Fall tatsächlich nur um (hochgestellte) Indices (also nicht um Exponenten); die Schreibweise geht auf den Ricci-Kalkül zurück, in dem die Stellung der Indices von den Transformationseigenschaften abhängt.

(z – das frühere[5] y – bleibt hierbei eindimensional, f soll ausreichend glatt definiert sein). Im $(N+1)$-dimensionalen Raum mit den Koordinaten $(x^1, \ldots, x^N, z)$ ist durch $(x^1, \ldots, x^N, z) = \bigl(x^1, \ldots, x^N, f(x^1, \ldots, x^N)\bigr)$ gerade der Graph der Funktion f, also eine N-dimensionale Hyperfläche definiert. In der ebenen Version der Berührungstransformation (also im $(1+1)$-dimensionalen Raum) entspricht dies einer eindimensionalen Kurve, im $(2+1)$-dimensionalen Raum einer gewöhnlichen (im allgemeinen nicht ebenen) Fläche.

Die Entsprechung für zwei sich berührende Kurven sind nun zwei sich berührende Hyperflächen, beschrieben durch die beiden Funktion f und $\tilde{f}$. Bei den Kurven bedeutete *berührend*, daß die Funktionswerte und die Ableitungen $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ an der Stelle x gleich sein müssen. Für die Hyperflächen gilt sinngemäß das gleiche, nun aber für die Richtungsableitungen in alle Richtungen $v \in \mathbf{R}^N$

$$\nabla_v f(x^1, \ldots, x^N) = \nabla_v \tilde{f}(x^1 1, \ldots, x^1 N) \quad \text{für alle } v \in \mathbf{R}^N \tag{6}$$

oder – was überschaubarer, aber gleichwertig ist – für alle Ableitungen in Richtung der Koordinaten:

$$\frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, \ldots, x^N) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n}(x^1, \ldots, x^N) \quad \text{für alle } n. \tag{7}$$

Die Ableitungen in Richtung der Koordinaten bezeichnen wir wieder als

$$p_n = \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, \ldots, x^N). \tag{8}$$

(Anschaulich entsprechen die so definierten Ableitungen $(p_1, \ldots, p_n)$ dem *Gradienten* der Funktion, also derjenigen Richtung im Raum $\mathbf{R}^N$, in welche die stärkste Änderung von f – oder der stärkste Anstieg von f – erfolgt.)

Die Verallgemeinerung des Linienelements $(x, y, p) \in \mathbf{R}^3$ ist nun das *(Hyper-)Flächenelement*. So wie das Linienelement anschaulich ein Punkt in der Ebene und eine durch diesen Punkt verlaufende Steigung war, definieren wir das Flächenelement analog als einen Punkt im $(N+1)$-dimensionalen Raum mit den Koordinaten $(x^1, \ldots, x^N, z)$ und eine durch diesen Punkt gelegten *Tangential(hyper)fläche*. Beide Objekte – Linienelement und Hyperflächenelement – können also als lineare geometrische Objekte gesehen werden, die den Graphen einer Funktion in einem Punkt berühren (und linear approximieren).

Zur vollständigen Beschreibung der Tangential(hyper)fläche an die Funktion f im (fix gedachten) Punkt $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N)$ benötigen wir $2N+1$ Zahlen: die N Koordinaten $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N)$, den Wert der Funktion an diesem Punkt $\tilde{z} = f(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N)$, und die Ableitungen (den Gradienten) der Funktion an diesem Punkt $\tilde{p}_n = \frac{\partial f}{\partial x^n}(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N)$. Mit diesen $2N+1$ Zahlen läßt sich die Tangentialhyperebene als lineare Näherung an die Funktion definieren[6] als

$$\Bigl\{(x^1, \ldots, x^N, z) \in \mathbf{R}^{N+1} : z = f(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^N) + \sum_n \tilde{p}_n x^n\Bigr\} \tag{9}$$

[5] Die Umbenennung von y nach z erfolgt hier, um möglichst nahe an der Schreibweise von Lie u. Engel (1890, S. 114–171) zu bleiben. y wird dort nicht genutzt, weil zunächst von den Koordinaten (x, y) zu (x, y, z) übergegangen wird und dann – im nächsten Schritt – zu $(x^1, \ldots, x^N, z)$.

[6] Eine alternative Betrachtung führt über den Normalenvektor der Hyperebene: die Orientierung der Hyperebene kann durch die Koordinaten des $(N+1)$-dimensionalen Normalenvektors der Hyperfläche beschrieben werden, wobei die Länge des Vektors beliebig ist, d. h., *eine* (nichtverschwindende) Komponente des Vektors kann beispielsweise auf 1 oder -1 normiert werden. Bei Hyperflächen, die

Ein (Hyper-)Flächenelement wird also vollständig beschrieben durch die Angabe des Orts $(x^1, \ldots, x^N, z)$ im Raum $\mathbf{R}^{N+1}$ (hier jetzt ohne die Tilden von oben) und der N Ableitungskomponenten $(p_1, \ldots, p_N)$:

$$(x^1, \ldots, x^N,\ z,\ p_1, \ldots, p_N) \in \mathbf{R}^{2N+1}. \tag{10}$$

Die Berührungstransformation soll nun – wie gehabt – sich berührende Hyperflächen auf sich berührende Hyperflächen abbilden; dies kann wieder explizit erreicht werden durch eine Abbildung $\mathcal{B} : \mathbf{R}^{2N+1} \to \mathbf{R}^{2N+1}$ mit den (insgesamt $2N+1$) Komponentenfunktionen

$$x^n_{(1)} = X^n(x^1, \ldots, x^N,\ z,\ p_1, \ldots, p_N), \tag{11}$$
$$z_{(1)} = Z(x^1, \ldots, x^N,\ z,\ p_1, \ldots, p_N), \tag{12}$$
$$p^{(1)}_n = P_n(x^1, \ldots, x^N,\ z,\ p_1, \ldots, p_N). \tag{13}$$

(Der vorherige Index $[\,]_1$, der – z. B. oben in Abschnitt 1 – Koordinaten (oder Steigungen) im Bildraum bezeichnet hat, wird nun in runde Klammern $[\,]_{(1)}$ oder $[\,]^{(1)}$ gesetzt, um ihn von den Komponentenindices zu unterscheiden.)

Die Glgen. (11) bis (13) sollen also eine Abbildung von Hyperflächenelementen auf Hyperflächenelemente definieren. Wie zuvor, können die Abbildungen X^n, Z, P_n daher nicht beliebig definiert werden, sondern müssen zusätzliche Bedingungen erfüllen.

3 Der Elementverein

Die weitere Entwicklung in $\mathbf{R}^{2N+1}$ verläuft völlig analog zum Fall $N = 1$. Wir definieren eine Einsform $\omega : \mathbf{R}^{2N+1} \to \mathbf{R}$, die Tangentialvektoren zur Hyperfläche (*nicht* nur im $(N+1)$-dimensionalen Tangentialraum zu den Koordinaten $(x^1, \ldots, x^N, z)$, sondern im $(2N+1)$-dimensionalen Tangentialraum zu den $(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N)$) auf 0 abbilden soll:

$$\omega_{(x^n,z,p_n)} : \mathbf{R}^{2N+1} \to \mathbf{R}, \quad v_{(x^n,z,p_n)} \mapsto \omega_{(x^n,z,p_n)}\big(v_{(x^n,z,p_n)}\big). \tag{14}$$

$(N+1)$-dimensionale Tangentialvektoren $\tilde{v}$ an die Hyperfläche im Punkt $(x^1, \ldots, x^N, z)$ erhält man, indem man eine beliebige Richtung $(\xi^1, \ldots, \xi^N)$ in der $(x^1, \ldots, x^N)$-Ebene vorgibt und dann die z-Komponente ζ aus den Richtungsableitungen (also dem Gradienten) der Funktion f berechnet. Die Komponenten eines solchen Tangentialvektors sind also

$$\tilde{v} = \Big(\xi^1, \ldots, \xi^N, \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \xi^n \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, \ldots, x^N)}_{=\zeta}\Big) \in \mathbf{R}^{N+1}. \tag{15}$$

---

als Graph einer Funktion $z = f(x^1, \ldots, x^N)$ definiert sind, wird die Komponente in z-Richtung nie verschwinden und kann daher auf -1 gesetzt werden. Man erhält so den (nach „unten“ weisenden) Normalenvektor $\tilde{v}_\mathrm{n} \in \mathbf{R}^{N+1}$ am Punkt $(x^1, \ldots, x^N, z)$:

$$\tilde{v}_\mathrm{n} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^N), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^N}(x^1, \ldots, x^N),\ -1\Big) = (p_1, \ldots, p_N, -1),$$

der also N unabhängige Komponenten hat.

Nun betrachten wir statt des Punktes $(x^1, \ldots, x^N, z) \in \mathbf{R}^{N+1}$ den zugehörigen Punkt $(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N) \in \mathbf{R}^{2N+1}$ im erweiterten Raum, dessen neue Koordinaten den Richtungsableitungen entsprechen. Die Punkte dieses $(2N+1)$-dimensionalen Raums beschreiben also einen Punkt in der (durch f definierten) Hyperfläche zusammen mit einem Richtungsvektor, der aber im allgemeinen nicht dem „Gradienten" der Fläche (also den Richtungsableitungen in die Koordinatenrichtungen) entsprechen muß. Genau wie im eindimensionalen Fall, gibt es aber zu einer Hyperfläche $z = f(x^1, \ldots, x^N)$ genau einen Punkt $(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N)$, an dem die Koordinaten und der Gradient übereinstimmen: $p_n = \frac{\partial f}{\partial x^n}$ für alle n.

Eine Bedingung hierfür läßt sich wieder mit einer passend gewählten Einsform ω angeben, die an jedem (Fuß-)Punkt $(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N)$ einen (Tangential-)Vektor $v_{(x^n,z,p_n)} = (\xi^1, \ldots, \xi^N, \zeta, \pi_1, \ldots, \pi_N)$ genau dann auf 0 abbilden soll, wenn dessen erste $N+1$ Komponenten (als Tangentialvektor an die Hyperfläche) so gewählt sind, daß sie zu den letzten N Komponenten des Fußpunkts (als Gradient der Hyperfläche) passen. Die zunächst beliebigen Vektorkomponenten $(\xi^1, \ldots, \xi^N, \zeta)$ sollen also an der Stelle $(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N)$ immer so gewählt sein, daß $\zeta = \sum_n \xi^n p_n$ ist, also

$$\omega(v) = \sum_n -p_n \xi^n + \zeta = 0; \tag{16}$$

die Einsform ω hätte also die Komponenten $(-p_1, \ldots, -p_N, 1, 0, \ldots, 0)$ (abhängig vom Fußpunkt). Wir können stattdessen (mit den Basis-Einsformen $\mathrm{d}x^n, \mathrm{d}z, \mathrm{d}p_n$) auch schreiben

$$\omega = \sum_n -p_n \,\mathrm{d}x^n + \mathrm{d}z. \tag{17}$$

Als *Elementverein* (von Flächenelementen) wird nun eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^{2N+1}$ bezeichnet, deren Tangentialvektoren v Gl. (16) erfüllen. Diese Definition schließt auch diejenigen Fälle ein, bei denen die Untermannigfaltigkeit weniger als N Dimensionen hat, angefangen mit einem Punkt (und allen Tangentialvektoren), über eine eindimensionale Kurve usw.

4 Die Berührungstransformation

Wie schon in der Ebene muß auch im $\mathbf{R}^{2N+1}$ die Berührungstransformation gemäß Glgen. (11) bis (13) zu einer Beziehung zwischen zwei Linearformen führen:

$$\omega_{1,(x^1,\ldots,x^N,z,p_1,\ldots,p_N)} = \varrho(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N)\omega_{(x^1,\ldots,x^N,z,p_1,\ldots,p_N)}, \tag{18}$$

wobei, wie zuvor,

$$\omega_{1,(x^1,\ldots,x^N,z,p_1,\ldots,p_N)}(v) = \omega_{(x^1_{(1)},\ldots,x^N_{(1)},z_{(1)},p^{(1)}_1,\ldots,p^{(1)}_N)}(v_{(1)}) \tag{19}$$

ist[7].

[7] Glg. (18) entspricht somit dem Ausdruck $\mathrm{d}Z - \sum_n P_n \mathrm{d}X^n = \varrho\left(\mathrm{d}z - \sum_n p_n \mathrm{d}x^n\right)$ in Differentialschreibweise bei Lie u. Engel (1890).

Im N-dimensionalen Fall kann man nun verschiedene Fälle unterscheiden, wie die Koordinaten vor und nach der Berührungstransformation voneinander abhängen. Es kann beispielsweise bloß *eine* Relation

$$\Omega(x^1, \ldots, x^N, z, x^1_{(1)}, \ldots, x^N_{(1)}, z_{(1)}) = 0 \tag{20}$$

geben (entsprechend der *Æquatio directrix* in der Ebene), welche die Koordinaten vor und nach der Transformation in Beziehung setzt; es können aber auch mehrere, voneinander unabhängige solche Relationen $\Omega_1(\ldots) = 0, \Omega_2(\ldots) = 0, \ldots$ sein.

Desweiteren kann man für gewisse Berührungstransformationen Bedingungen ähnlich wie in den Glgen. (2) und (3) herleiten, wenn beispielsweise die $2N$ Koordinaten $x^1, \ldots, x^N, p_1, \ldots, p_N$ für sich allein transformiert werden (also unabhängig von z). In diesem Fall gilt (jeweils für alle $k = 1 \ldots N$):

$$\frac{\partial}{\partial p_k} Z - \sum_n P_n \frac{\partial}{\partial p_k} X^n = 0 \tag{21}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x^k} Z - \sum_n P_n \frac{\partial}{\partial x^k} X^n = -p_k \left(\frac{\partial}{\partial z} Z - \sum_n P_n \frac{\partial}{\partial z} X^n \right) = -p_k \frac{\partial}{\partial z} Z. \tag{22}$$

5 Die Legendre-Transformation als Beispiel

Die *Æquatio directrix* der höherdimensionalen Legendre-Transformation[8] lautet

$$\Omega(x^1, \ldots, x^N, z, x^1_{(1)}, \ldots, x^N_{(1)}, z_{(1)}) = x^1 x^1_{(1)} + \cdots + x^N x^N_{(1)} - z - z_{(1)} = 0. \tag{23}$$

Die Transformationsgleichungen für die einzelnen Komponenten sind:

$$x^n_{(1)} = X^n(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N) = p_n \tag{24}$$

$$z_{(1)} = Z(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N) = x^1 p_1 + \cdots + x^N p_N - z \tag{25}$$

$$p^{(1)}_n = P_n(x^1, \ldots, x^N, z, p_1, \ldots, p_N) = x^n. \tag{26}$$

Als Beispiel für eine Hyperfläche im $\mathbf{R}^{N+1}$, die durch diese Berührungstransformation auf eine andere Hyperfläche abgebildet wird, betrachten wir die paraboloide Hyperfläche, die mittels $z = f(x^1, \ldots, x^N) = \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} (x^n)^2$ definiert ist. Die Richtungsableitungen der Hyperfläche sind $p_n = \frac{\partial}{\partial x^n} f(x^1, \ldots, x^N) = m_n x^n$ (keine Einstein-Konvention, also keine Summe).

Mit den Transformationsgleichungen erhält man nun das Bild der Hyperfläche:

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \sum x^n p_n - z = \sum x^n (m_n x^n) - f(x^1, \ldots, x^N) \\ &= \sum m_n (x^n)^2 - \sum \frac{m_n}{2} (x^n)^2 = \sum \frac{m_n}{2} (x^n)^2 \\ &= \sum \frac{1}{2m_n} p_n^2 = \sum \frac{1}{2m_n} (x^n_{(1)})^2. \end{aligned} \tag{27}$$

[8] siehe hierzu auch Teil 1, Abschnitt 8 und Teil 2, Abschnitt 5
⟨URL: `http://dtrx.de/od/docs/ContactTransformationsPart1_Dietrich.pdf`⟩
⟨URL: `http://dtrx.de/od/docs/ContactTransformationsPart2_Dietrich.pdf`

Die transformierte Fläche ist somit wieder paraboloid, aber die formbeschreibenden Parameter m_n sind nun invertiert.

6 Moderne Entwicklung – Kontaktgeometrie

Die Theorie der Berührungstransformationen ist im mathematischen Gebiet der *Kontaktgeometrie* aufgegangen. So wie eine Berührungstransformation die Einsform $\omega = \sum_n -p_n \mathrm{d}x^n + dz$ invariant läßt, betrachtet man in der Kontaktgeometrie *Kontaktomorphismen* (als Verallgemeinerung der Berührungstransformationen) die sogenannte *Kontaktstrukturen* auf Mannigfaltigkeiten erhalten. Insbesondere wird die Einsform ω in diesem Zusammenhang als *Kontaktform* bezeichnet.

Literatur

[Lie u. Engel 1890] Lie, Sophus ; Engel, Friedrich: *Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt.* Leipzig : B. G. Teubner, 1890 http://books.google.de/books?id=Z7IIy6zQZZsC

[Lie u. Scheffers 1896] Lie, Sophus ; Scheffers, Georg: *Geometrie der Berührungstransformationen.* Leipzig : B. G. Teubner, 1896 http://books.google.com/books?id=kc7oDhL8fIUC